KULTUR NEU ENTDECKEN

SWR2

SWR2 Wissen: Aula

Zirkel und Lineal – Wie der Mensch mit Mathematik die Welt erobert

Von Albrecht Beutelspacher

Sendung vom: Sonntag, 24. Oktober 2021, 08.30 Uhr
Erst-Sendung vom Sonntag, 14. Februar 2021, 08.30 Uhr
Redaktion: Ralf Caspary
Produktion: SWR 2021

Als der Mensch sesshaft wurde und in Gemeinschaften lebte, musste er ganz praktische Fragen lösen wie "Wie groß ist mein Grundstück, wie groß mein Acker, wie weit wohnt mein Nachbar entfernt?" Seine Hilfswerkzeuge waren: Zirkel und Lineal.

MANUSKRIPT

Anmoderation:

Mit dem Thema: „Zirkel und Lineal – Wie der Mensch Mathematik die Welt eroberte“. Am Mikrofon: Ralf Caspary.

Um von Kartoffeln zu leben, muss man wissen, wie groß die Anbaufläche ist. Um eine Pyramide zu errichten, benötigt man Kenntnisse bestimmter mathematischer Prinzipien; um ein Haus so zu bauen, dass es nicht einstürzt, muss man den rechten Winkel kennen. Um zu wissen, wo des Nachbarn Grundstück anfängt, sollte man Flächen berechnen können.

Der Mensch hat im Verlauf seiner Geschichte mithilfe der Mathematik den Raum und damit die Welt erobert. Im Mittelpunkt standen dabei zwei Werkzeuge: Lineal und Zirkel.

Albrecht Beutelspacher, emeritierter Professor für Geometrie und Diskrete Mathematik, Gründer des Mathematik-Museums in Gießen, erläutert diese Zusammenhänge. Er zeigt, wo und wie wir mit Zirkel und Lineal erfolgreich waren und wo nicht.

Albrecht Beutelspacher:

Wie sehen wir die Welt? Erkennen wir die Gegenstände der Welt sozusagen objektiv – oder ist das, was wir als Welt wahrnehmen, gefiltert, verändert, reduziert – und zwar genau deswegen, weil wir die Welt anschauen – und sie dabei notwendigerweise mit unseren vorläufigen Vorstellungen und Ideen wahrnehmen?

Dies sind große Fragen, auf die bis heute eine Vielzahl von Antworten gegeben wurde. Und das heißt auch, dass es noch keine endgültige Antwort darauf gibt.

Ich möchte mit Ihnen einen Spezialfall dieser Frage besprechen.
Es geht darum, wie die konkreten Werkzeuge, die wir benutzen, um praktische geometrische Aufgaben zu lösen, wie diese unser Bild der Welt prägen. Die Frage ist: Bestimmen Werkzeuge wie Lineal und Zirkel unsere Vorstellung, was der Raum ist und wie wir ihn beschreiben und beherrschen können?

Der Vorteil bei der Erörterung dieser Spezialfrage ist, dass wir es nicht mit schwer fassbaren Begriffen wie „Vorstellungen, „Ideen“,

„Wahrnehmungen“ zu tun haben, sondern mit konkreten Objekten, nämlich Zirkel und Lineal.

Wir nähern uns dem Thema in fünf Stufen:
1. Die Anfänge
2. Die Werkzeuge
3. Die Konzepte
4. Die Erfolge und
5. Die Grenzen

1. Wie hat alles angefangen?
Ich lade Sie ein zu einer *Zeitreise* in eine ferne Vergangenheit, vor etwa zehn- oder zwanzigtauend Jahren. Das war die Zeit, als der *homo sapiens* (wie wir uns heute immer noch nennen) *sesshaft* wurde. Aus umherziehenden Gruppen wurden sesshafte Stämme. Die festen Ansiedlungen hatten viele Vorteile, aber schufen auch neue Herausforderungen. Man musste sein Leben gänzlich neu organisieren. Man konnte nicht einfach weiterziehen und die Probleme zurücklassen, sondern man musste die Probleme vor Ort lösen.

Der Ort der Ansiedlung war der *Referenzpunkt*, an dem sich alles orientierte. Nun lohnte es sich, sich Wege zu merken und eine Vorstellung von Entfernungen zu entwickeln. Auch innerhalb des Siedlungsortes waren geometrische Fragen wichtig: Wer wohnt neben mir? Wer wohnt in der Mitte, wer am Rand? Usw. usw.

Dadurch waren auch *mathematische* Fähigkeiten gefragt. Man musste die Größe von Flächen, zum Beispiel Ackerflächen bestimmen, man brachte rechte Winkel, etwa beim Hausbau, und man musste Höhen berechnen. Das war Geometrie im wörtlichen Sinne, nämlich „Vermessung der Erde“. Neben den Herausforderungen des täglichen Lebens stellten sich auch ganz andere Fragen, genauer gesagt eine prinzipielle Frage, nämlich, wie die Welt funktioniert. Mit „Welt“ ist hier die große Welt gemeint, Himmel und Erde, das *Universum*. Und hier stellte sich eine unabweisbare Frage, nämlich nach welchen Prinzipien sich die *Himmelskörper* bewegen. Der Lauf der Sonne, die Phasen des Mondes, die Bewegungen der Planeten, die Anordnung der Sterne waren voller Rätsel. Die Menschen wollten nicht nur Vorhersagen machen können, sondern auch verstehen, warum die Welt so ist, wie sie ist.

Aus diesen Fragen entwickelte sich sowohl eine Praxis als auch eine Theorie. Diese hatten einen ersten Höhepunkt bei den Babyloniern in Mesopotamien vor etwa 4000 Jahren, erhielten aber ihre endgültige Prägung durch die griechischen Wissenschaftler vor gut 2500 Jahren. Diese erste Blüte der Mathematik ist mit Namen wie Thales von Milet, Pythagoras und – etwas später – Euklid und Archimedes verbunden. Damals wurden – nach allem, was wir wissen können – zwei Fragenkomplexe in den Blick genommen:

1. Die praktische Frage:
Wie kann man real Konstruktionen durchführen: Die Schwierigkeiten begannen schon bei scheinbar einfachen Aufgaben: Wie erhält man eine gerade Linie? Wie einen Kreis? Wie ein Quadrat? Wie kann man zu einem gegebenen Rechteck ein gleichgroßes Quadrat konstruieren?
2. Die prinzipielle Frage:
Wie ist der Raum aufgebaut? Was sind seine Grundelemente? Wie ist er strukturiert?

2. Werkzeuge
Die Antworten auf diese Fragen hängen zusammen. Der Zusammenhang wird hergestellt durch die Werkzeuge, die die Menschen erfunden (oder gefunden) haben, um Geometrie zu machen.

Zunächst waren *praktische Hilfsmittel* zum Messen von Strecken von Bedeutung. Es gehört nicht viel Fantasie dazu, sich vorzustellen, dass die Menschen mit *Stöcken* hantiert haben, die sie aus Ästen herstellten. Damit konnten sie nicht nur sonst unerreichbare Früchte herunterschlagen, sondern auch *messen* (indem sie den Stock mehrfach anlegten). Um genau messen zu können, vor allem um Bruchteile der Stocklänge genau messen zu können, ist ein *gerader Stock* empfehlenswert. Damit war das *Lineal* geboren.

Das zweite grundlegende Instrument ist der *Zirkel*. Dabei geht es um Bewegung. Wenn man ein Seil an einem Pflock befestigt, das Seil spannt und das andere Ende des Seils bewegt, dann erhält man eine *Kreislinie*. Von dieser Erfahrung ist es – zumindest gedanklich – nicht mehr weit zur Erfindung des Zirkels. Das sind die praktischen Werkzeuge, die die Menschen vermutlich in allen Teilen der Welt nutzten, um praktische Aufgaben zu lösen.

3. Konzepte
Die Menschen aller Zeiten interessierten sich aber auch für *grundsätzliche Fragen*. Insbesondere in der Zeit der Vorsokratiker in der griechischen Antike (im 6. vorchristlichen Jahrhundert) wurden prinzipielle Fragen gestellt: Wie ist die Welt aufgebaut? Was ist der Urgrund des Seins? Was sind die elementaren Kräfte, die die Welt in Bewegung halten?

In unserem Zusammenhang ist eine präzisere Frage von Bedeutung: *Was ist der Raum?* Aus welchen Komponenten besteht der Raum? Wie verhalten sich diese zueinander?

Die Antwort der Mathematik auf diese Frage war entscheidend durch die *Werkzeuge* Lineal und Zirkel geprägt: Mit dem *Lineal* kann man Punkte verbinden. Mit dem Zirkel kann man Kreise zeichnen, also Punktepaare mit gleichem *Abstand* konstruieren.

Was sich für uns einfach anhört, war allerdings ein langer Weg, der nicht ohne Alternativen war und aus mindestens *zwei Schritten* bestand. Im *ersten Schritt* wurden die ursprünglich Messwerkzeuge als *Zeichenwerkzeuge* verwendet. Mit einem geraden Stab (einem „Lineal“) kann man nicht nur in der Natur oder beim Bauen etwas messen, sondern man kann damit auch eine *gerade Linie zeichnen*. Mit einer Schnur kann man nicht nur entscheiden, ob zwei reale Strecken gleich lang sind, sondern man kann *Kreise zeichnen*.

Sie merken: Fast unweigerlich kommt man auf die Begriffe „Strecke“ und „Kreis“. Und um mit diesen beiden Konzepten begrifflich umgehen zu können, braucht man die Vorstellung von *Punkten*. Der Raum besteht aus Punkten, man kann zwei *Punkte* durch eine Strecke verbinden und man kann einen Kreis um einen Mittel*punkt* zeichnen.

Der *zweite Schritt* bestand darin, sich auch von den Zeichnungen zu lösen. Dass das notwendig war, wird offensichtlich, wenn wir uns das *Zeichnen im Sand* vorstellen, wie es die Griechen angeblich gemacht haben. Wenn man in den Sand malt, ist ein Punkt kein Punkt, sondern ein Loch; und eine Strecke ist keine Strecke, sondern ein Graben. Und wenn sich zwei Geraden schneiden, das heißt, zwei Gräben kreuzen, dann bildet sich ein riesiges Loch. Das Ganze führt dazu, dass man auch bei einfachsten Konstruktionen gar *nichts mehr erkennen kann* – es sei denn, *man weiß, was hier „eigentlich“ passiert*. Denn „eigentlich“ treffen sich zwei Geraden in genau einem Punkt und nicht in einem Loch.

Übrigens lösen auch die Fortschritte der Zeichentechnik, die Verwendung von Bleistift oder Laserdrucker, das Problem nicht, und zwar prinzipiell nicht. Egal, wie genau man zeichnet: *Die Realität ist nicht die Mathematik*. Hier hilft nur, die Zeichnung – gedanklich! – auf das „Eigentliche“ zu reduzieren, auf das Wesentliche zu konzentrieren, kurz, zu *abstrahieren*.

Diese Abstraktion ist eine der großen Leistungen der griechischen Mathematik. Wir erkennen sie deutlich in Euklid epochemachenden Werk „Elemente“ etwa im Jahre 300 v. Chr. Euklid beginnt sein Buch äußerst radikal. Der erste Satz lautet: *Ein Punkt ist, was keine Teile hat*. Und der zweite: *Eine Linie ist eine breitenlose Länge*.

Auf diese idealen Objekte kann man die Logik anwenden, das heißt die Mathematik machen. So ist dieses Buch bis heute das Buch, durch das Mathematik definiert wurde. Für die griechischen Naturforscher, Philosophen und Mathematiker war der *Raum aus Punkten aufgebaut und erhält seine Struktur durch Geraden und Kreise*. Durch eine Gerade kann man Punkte verbinden und mit einem Kreis kann man gleiche Entfernungen konstruieren. Und wir sehen das heute immer noch so.

Aber es hätte auch *ganz anders* sein können: Stellen wir uns einen Augenblick lang vor, die Tiere, die später Menschen werden sollten, wären keine Landtiere gewesen, sondern vielleicht Vögel oder Fische oder Quallen. Dann wären ganz andere Aspekte des Raums wichtig gewesen, zum Beispiel *Geschwindigkeit* oder *Strömungen* oder *Temperaturunterschiede*. Und entsprechend wären die Werkzeuge zur Erfassung des Raums andere gewesen. Man kann sich tatsächlich kaum vorstellen, dass ein Vogel mit einem Zirkel hantiert.

Das ist natürlich reine Spekulation. Aber die Entscheidung „Punkte, Geraden, Kreise" beziehungsweise „Zirkel und Lineal" ist eine Entscheidung, die unseren Blick auf die Welt bis heute prägt, und zwar in Praxis und Theorie. *Eine der ganz großen Entscheidungen der Menschheit*.

4. Erfolge

Nun kann man alles Mögliche postulieren, alle möglichen Entscheidungen treffen, die Frage ist: Sind sie sinnvoll? Hat sich das Konzept bewährt? Wo sind die Erfolge?

Die Antwort ist ganz klar: Diese Entscheidung war *eine der erfolgreichsten*, die die Menschheit je getroffen hat. Sie hat nicht nur Geometrie und Mathematik, sondern die (Natur-)wissenschaften insgesamt möglich gemacht, sie hat sie beflügelt und in atemberaubende Höhen geführt.

Ich nenne nur einen spektakulären Erfolg des Programms „Zirkel und Lineal", nämlich die *Berechnung der Kreiszahl Pi durch Archimedes*.

Die Zahl Pi hat die Menschen seit Jahrtausenden in den Bann gezogen. Man braucht sie, um den Umfang eines Kreises auszurechnen. Wenn man den Durchmesser kennt, muss man diesen mit der Zahl Pi multiplizieren und erhält den Umfang. Anders gesagt: Pi ist das Verhältnis von Umfang zu Durchmesser.

Sie alle wissen, das Pi gleich 3,14 ist. Ungefähr. Aber auch schon dieses ungefähre Ergebnis ist nicht ganz einfach zu erhalten. Die erste echte

Berechnung geht auf Archimedes (3. Jh. v. Chr.) zurück. Wie hat er das gemacht? In gewisser Weise, *indem er vom Kreis, also dem Zirkel, wieder zum Lineal, das heißt zu geradlinig begrenzten Flächen zurückging*. Konkret zeichnete er in den Kreis mit dem Lineal ein Sechseck. Das hat natürlich einen kleineren Umfang als der Kreis – aber den konnte Archimedes berechnen. Als nächstes betrachtete er ein Zwölfeck im Kreis, von dem er auch den Umfang berechnen konnte. So schritt er fort bis zum 96-Eck und hat so die Näherung 22/7 für pi erschlossen, die dem Wert 3,142 entspricht. Damit hat Archimedes Pi auf ein Promille genau bestimmt.

Mit der *Zirkel-und-Lineal-Geometrie errangen die griechischen Mathematikern Sieg auf Sieg*. Alles, was man sich vorstellen konnte, wurde gelöst. Die antike Geometrie war so erfolgreich, dass man die geometrischen Methoden sogar dazu verwendete, Rechnungen durchzuführen – und daher gar keine eigenständige Algebra entwickelte. Kurz: Die Geometrie der Antike stellt eine sensationelle Höhe der Mathematik dar, die erst 2000 Jahre später in Zeiten von Newton und Leibniz wieder erreicht wurde.

5. Grenzen

Eine Frage müssen wir aber doch stellen: Gibt es *Grenzen von Zirkel und Lineal?* Kann die antike Geometrie *alle Probleme lösen – oder gibt es unlösbare Probleme, das heißt* Aufgaben der Geometrie, die man mit Hilfe von Zirkel und Lineal nicht lösen kann?

Es gibt in der Tat Probleme, an denen die antiken Mathematiker scheiterten. Das berühmteste dieser Probleme ist die ominöse „Quadratur des Kreises". <<LESEN, S. 185>> Dabei geht es um die beiden einfachsten Figuren: Der Kreis ist das, was man mit dem Zirkel machen kann, genau dafür ist ein Zirkel da. Ein Quadrat kann man mit Hilfe von Lineal und Zirkel auf einfachste Weise konstruieren.

Die Frage dreht sich um den Flächeninhalt. Den von Quadrat kann man ganz leicht berechnen (Seitenlänge mal Seitenlänge), den vom Kreis nur sehr schwierig und approximativ. Die Frage ist: kann man zu einem Kreis ein Quadrat konstruieren, das genau den gleichen Flächeninhalt hat? Wenn ja, hätte man ein schwieriges Problem (Kreis) auf eine einfaches zurückgeführt (Quadrat). Die Frage hat zwei Zusatzbedingungen: 1. Man möchte *exakt* den gleichen Flächeninhalt, es geht also nicht um Näherungen. 2. Als Werkzeuge sind nur Zirkel und Lineal zugelassen.

Die Frage nach der Quadratur des Kreises trat in der Antike auf und konnte damals nicht beantwortet werden. Sie konnte auch im europäischen Mittelalter nicht beantwortet werden. Auch nicht in der islamischen Mathematik. Auch nicht von Genies wie Newton und Leibniz. Das Problem wurde erst im Jahre 1882 gelöst.

Genauer gesagt wurde 1882 die Frage beantwortet. Denn die Antwort ist nein. Es geht nicht. Hier kommen Zirkel und Lineal an ihre Grenzen. Man kann – mit Zirkel und Lineal alleine – keinen Kreis in ein flächengleiches Quadrat verwandeln.

Letztlich hängt das an einer Eigenschaft der Kreiszahl pi. Alle wissen, dass pi etwa gleich 3,14 ist. Aber nicht genau. Auch nicht gleich 3,14159, sondern nur ungefähr. Es stimmt nie ganz genau, auch wenn man noch so viele Stellen betrachtet. Das wusste man schon lange.

Aber das ist nicht sonderlich aufregend, denn man kennt viele Zahlen, bei denen das auch so ist. Zum Beispiel Wurzel 2. Man wusste: Wenn die Quadratur des Kreises möglich ist, dann muss Pi eine Zahl einer ganz speziellen Form sein, nämlich eine „konstruierbare“ Zahl. Solche Zahlen entstehen aus natürlichen Zahlen wie 1, 2, 3, …, indem man auf sie fünf Operationen anwendet: plus, minus, mal, geteilt und Quadratwurzeln. Etwas pointiert kann man sagen, dass die Konstruktionen, die man mit dem Lineal macht, zu den Grundrechenarten plus, minus, mal und geteilt führen, während bei der Anwendung des Zirkels, insbesondere bei der Bestimmung der Schnittpunkte von Kreisen, Quadratwurzeln ins Spiel kommen.

Dabei dürfen komplizierte Zahlenausdrücke sein, Summen von Wurzeln, Wurzeln aus Wurzeln und alles in beliebig große Anzahl – aber was nicht vorkommen darf, sind 3. oder 5. oder höhere Wurzeln oder Operationen wie Sinus oder Kosinus.

Man kann sich kaum vorstellen, wie es gelingen sollte, nachzuweisen, dass Pi keiner dieser unendlich vielen monströsen Zahlenausdrücke ist, aber genau das gelang dem deutschen Mathematiker Ferdinand Lindemann im Jahre 1882. Er hat einen Satz bewiesen, der noch viel mehr sagt. Aber die wichtigste Konsequenz seines Satzes ist, dass Pi keine konstruierbare Zahl ist.

Damit war nach über 2000 Jahren das Problem der Quadratur des Kreises erledigt: Sie ist – jedenfalls im strengen mathematischen Sinne – unmöglich.

Wir sehen, dass die Entscheidung für die Werkzeuge Zirkel und Lineal und damit für das Konzept „Punkte, Geraden, Kreise“ außerordentlich erfolgreich war. Es prägt unsere Vorstellung des Raums bis heute unhinterfragt. Dieses Konzept ist so erfolgreich, dass es noch an seinen

Grenzen, dort, wo seine Mittel versagen, noch faszinierende mathematische Erkenntnisse möglich macht.

*****